Poznámky a příklady. *1. (lemma o obcházení pólu) Nechť f má v bodě a pól násobnosti 1, $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$ a $\gamma_\rho : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, $0 < \rho < r$ je definována jako $\gamma : t \mapsto a + \rho e^{it}$. Potom*

$$\lim_{\rho \to 0+} \int_{\gamma_\rho} f = (\beta - \alpha) i.$$

2. (Jordanovo lemma) Nechť $R > 0$ a f je spojitá vzhledem k množině $A = \{z \in \mathbb{C} : \ Im(z) \geq 0, |z| \geq R\}$, $\kappa \geq 0$ a $\gamma_\rho : [0, \pi] \to \mathbb{C}$, $R < \rho$ je definována jako $\gamma_\rho : t \mapsto \rho e^{it}$. Označme

$$M_\rho = \max\{|f(z)| : \ z \in \langle \gamma_\rho \rangle\}$$

Nechť platí aplespoň jedna z podmínek

- $\kappa = 0$ *a* $\rho M_\rho \to 0$, $\rho \to \infty$,
- $\kappa > 0$ *a* $M_\rho \to 0$, $\rho \to \infty$,

potom $\displaystyle\lim_{\rho \to \infty} \int_{\gamma_\rho} e^{i\kappa z} f(z)\, dz = 0.$

Analogické tvrzení platí i pro dolní polorovinu.

3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^6}\, dx = \frac{2}{3}\pi,$

4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^3}\, dx = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$ *(pozor, integrál existuje jen ve smyslu hlavní hodnoty).*

Definice 1 (singularity a reziduum v nekonečnu)**.** *Říkáme, že komplexní funkce f má v nekonečnu*

- ***izolovanou singularitu****, pokud $f \in H(U(0, r, \infty))$ pro nějaké $r > 0$*
- ***odstranitelnou singularitu****, pokud má $f(\frac{1}{z})$ odstranitelnou singularitu v 0,*
- ***pól*** *násobnosti n, pokud má $f(\frac{1}{z})$ pól násobnosti n v 0,*
- ***podstatnou singularitu****, pokud má $f(\frac{1}{z})$ podstatnou singularitu v 0.*

Má-li f v nekonečnu izolovanou singularitu, potom definujeme ***reziduum*** *f v nekonečnu jako*

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} f(z)\, dz,$$

kde $\gamma_\rho(t) = \rho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ a $\rho > 0$ dostatečně velké (podle Cauchyovy věty víme, že hodnota nebude záviset na ρ).

Poznámky a příklady. *1. Je-li $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n z^n$ Laurentova řada f na $U(0, r, \infty)$, potom $\operatorname{Res}(f, \infty) = -c_{-1}$.*

2. *Platí* $\operatorname{Res}(f,\infty) = -\operatorname{Res}\left(f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2}, 0\right)$.

3. *Je-li* $f \in H(\mathbb{C} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\})$ *potom* $\operatorname{Res}(f,\infty) + \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, a_k) = 0$

4. *Některé integrály spočítáme snadněji s použitím rezidua v* ∞ *-* $\int_\gamma \frac{z^6}{1+z^7}\,dz = 2\pi i$*, kde* $\gamma(t) = 3e^{it}$*,* $t \in [0, 2\pi]$*.*

Teoretické důsledky Cauchyova vzorce a Caychyovy věty

Věta 2 (Liuvillova věta (zobecněná))**.** *Nechť* $f \in H(\mathbb{C})$*,* $N \in \mathbb{N}$ *a existuje* $C > 0$*, že* $\max_{|z|=R} |f(z)| \leq CR^N$*,* $R > 0$*, potom* f *je polynom stupně nejvýše* N*. Speciálně, je-li* $|f|$ *omezená na* $\mathbb{C}$*, potom je* f *konstantní na* $\mathbb{C}$*.*

Věta 3 (základní věta algebry)**.** *Nechť* P *je polynom stupně alespoň* 1*, potom* P *má kořen v* $\mathbb{C}$*.*

Věta 4 (o jednoznačnosti pro holomorfní funkce)**.** *Nechť* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *je oblast,* $f, g \in H(\Omega)$ *a* $N = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$*,* $M = \{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$*. Potom*

1. *má-li* N *v* Ω *hromadný bod, potom* $f = 0$ *na* Ω*,*

2. *má-li* M *v* Ω *hromadný bod, potom* $f = g$ *na* Ω*.*

Reformulací Cauchyova vzorce pro kruh dostaneme tzv. větu o průměru: je-li $f \in H(\Omega)$, $z = a + bi \in \Omega$ a $\overline{U(z,r)} \subset \Omega$, potom

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \tilde{f}\,ds,$$

kde $\tilde{f}(x,y) = f(x+iy)$ a $\gamma(t) = (a + r\cos t, b + r\sin t)$ (integrál napravo chápeme po složkách jako křivkový integrál 1. druhu), otdud již snadno dostaneme:

Věta 5 (princip maxima modulu)**.** *Nechť* $f \in H(\Omega)$ *a* $|f|$ *nabývá globálního maxima vzhledem k* Ω*. Potom* f *je konstantní na* Ω*.*

Věta 6 (Morerova (pro obdélníky))**.** *Nechť* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *je otevřená a* f *je komplexní funkce spojitá na* Ω*. Nechť navíc platí*

$$\int_\gamma f = 0,$$

kdykoliv je γ *uzavřená prostá a po částech* C^1 *a* $\langle\gamma\rangle \subset \Omega$ *je obdélník. Potom* $f \in H(\Omega)$*.*

Poznámky a příklady. 1. *Morerova věta platí i pro jiné systémy křivek než obdélníky (trojúhelníky, uzavřené po částech* C^1 *křivky).*

2. *Jedním z důsledků Morerovy věty je následující věta o nalepování: nechť* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *je otevřená,* f *je spojitá na* Ω *a* p *je přímka. Pokud* $f \in H(\Omega \setminus p)$*, potom* $f \in H(\Omega)$*.*